数学 B1 中間テスト (2004 年 12 月 13 日実施) 解答　担当 太田

1. （配点 15 点）部分分数分解するために,

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+2}$$

とおく．分母を払って,

$$x = a(x^2+2x+2) + (bx+c)(x+1). \qquad ①$$

式①に $x=-1$ を代入して $a=-1$ を得る．式①に $x=0$ を代入して $0=2a+c=-2+c$, よって $c=2$. 式①の両辺の x^2 の係数を比較して $0=a+b=-1+b$, よって $b=1$. 以上から,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)(x^2+2x+2)}\,dx &= \int \Big(\frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x+1} \Big) dx \\
&= \int \Big(\frac{\frac{1}{2}(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{1}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{x+1} \Big) dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+2) + \mathrm{Tan}^{-1}(x+1) - \log|x+1| + C.
\end{aligned}$$

2. （配点 15 点）

$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$.

また，$x = 2\mathrm{Tan}^{-1}2$ のとき $t=2$, $x = 4\mathrm{Tan}^{-1}4$ のとき $t=4$ であるから,

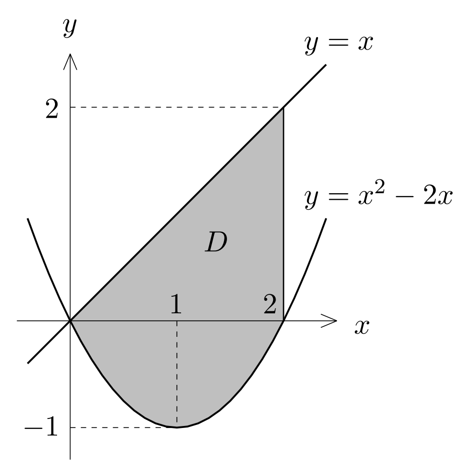
$$\begin{aligned}
I &= \int_2^4 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{(t-1)\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int_2^4 \frac{dt}{t(t-1)} = \int_2^4 \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \Big) dt \\
&= \Big[\log\frac{t-1}{t} \Big]_2^4 = \log\frac{3}{4} - \log\frac{1}{2} = \log\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

3. （配点 10 点）

$$\int_0^2 \Big[\int_{x^2-2x}^{x} f(x,y)\,dy \Big] dx$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad \text{（領域 } D \text{ は右図）}$$

$$= \int_{-1}^{0} \Big[\int_{1-\sqrt{y+1}}^{1+\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dx \Big] dy + \int_0^2 \Big[\int_y^2 f(x,y)\,dx \Big] dy$$



4. （配点 15 点）与えられた領域 V は,

$$V \ : \ 0 \leqq z \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 2\Big(1 - \frac{z}{3}\Big), \quad 0 \leqq x \leqq 1 - \frac{y}{2} - \frac{z}{3}$$

と表される．したがって

$$\iiint_V z\,dxdydz = \int_0^3 \left[\int_0^{2(1-\frac{z}{3})} \left[\int_0^{1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}} z\,dx\right] dy\right] dz$$
$$= \int_0^3 \left[\int_0^{2(1-\frac{z}{3})} z\left(1-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}\right) dy\right] dz$$
$$= \int_0^3 z\left(1-\frac{z}{3}\right)^2 dz = \frac{3}{4}.$$

5. (1) （配点 10 点）$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ であるから，

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

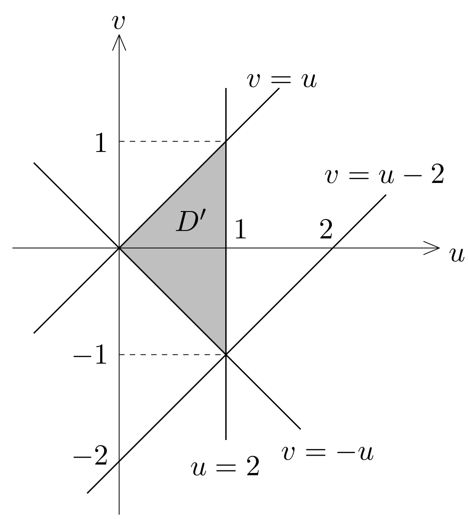
(2) （配点 10 点）領域 D に対応する uv 平面上の領域 D' は，$x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ を代入して

$$D' : 0 \leqq \frac{u-v}{2} \leqq 1, \quad 0 \leqq \frac{u+v}{2} \leqq 1 - \frac{u-v}{2}$$

である．整理すると，

$$D' : -u \leqq v \leqq u, \quad u \leqq 1 \qquad \text{（右図）}$$

（$v \geqq u-2$ という条件も出るが，これは不要となる.）



(3) （配点 10 点）

$$I = \iint_{D'} e^{\frac{v}{u}} \frac{1}{2}\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}}\,dv\right] du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^1 u\left(e - \frac{1}{e}\right) du\right) = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

6. （配点 15 点）曲面の方程式は $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. したがって $1 + z_x^2 + z_y^2 = \dfrac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$.
xy 平面内の領域 D を

$$D : x^2+y^2 \leqq \frac{a^2}{4}$$

とするとき，求める曲面積 S は，$S = \displaystyle\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$ となる．この重積分は，極座標に変換することにより，次のように求められる．

$$S = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{a/2} \frac{ar}{\sqrt{a^2-r^2}} dr\right] d\theta = a\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{a/2} \frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}} dr$$
$$= 2\pi a \left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^{a/2} = (2-\sqrt{3})\pi a^2.$$