数学 A1 中間テスト (2004 年 6 月 14 日実施) 解答　担当 太田

1. $g(x) = f(x) - x^2$ とおくと，$f(0) \geqq 0$ より $g(0) = f(0) - 0 \geqq 0$. また $f(1) \leqq 1$ より $g(1) = f(1) - 1 \leqq 0$. $g(x)$ は区間 $[0,1]$ 上連続であるから，中間値の定理より $g(c) = 0$ となる $c \in [0,1]$ が存在する．この c は $f(c) = c^2$ を満たす.

2. (1) $f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h)$, $f(x) = x^3$ より $(a+h)^3 - a^3 = 3h(a+\theta h)^2$. これを θ について整理すると，$h\theta^2 + 2a\theta - (a + \frac{h}{3}) = 0$ となる．$0 < \theta < 1$ に注意すると，$\theta = \frac{-a+\sqrt{a^2+ah+h^2/3}}{h}$ を得る.

(2) $$\frac{-a+\sqrt{h^2/3+ah+a^2}}{h} = \frac{(-a+\sqrt{a^2+ah+h^2/3})(a+\sqrt{a^2+ah+h^2/3})}{h(a+\sqrt{a^2+ah+h^2/3})}$$
$$= \frac{a+h/3}{a+\sqrt{a^2+ah+h^2/3}} \to \frac{a}{a+a} = \frac{1}{2} \ (h \to 0).$$

3. (1) $1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!}$

(2) e^{-x} のマクローリン近似 $e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ を用いると，

$$\frac{e^{-x} - (A + Bx + Cx^2)}{x^3} = \frac{1 - A + (-1-B)x + (\frac{1}{2} - C)x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3}$$

を得る．これが $x \to 0$ のとき極限を持つためには，分子の 2 次以下の項がすべてなくならなくてはならず，$A = 1$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ でなければならない．このとき

$$\text{与式} = \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} \to -\frac{1}{6} \quad (x \to 0)$$

4. (1) $g_u = f_x(u-v, uv) + vf_y(u-v, uv)$, $\quad g_v = -f_x(u-v, uv) + uf_y(u-v, uv)$.

(2) $g_{uv} = -f_{xx}(u-v, uv) + (u-v)f_{xy}(u-v, uv) + uvf_{yy}(u-v, uv) + f_y(u-v, uv)$

5. $f(x,y) = x\cos y + y - 1$ とおく.

(1) （まず $f(0,1) = 0$ に注意する.）$f_y = -x\sin y + 1$ より $f_y(0,1) = 1 \neq 0$. よって陰関数定理により，点 $(0,1)$ のある近傍で陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在する.

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = \frac{\cos y}{x\sin y - 1} \left(= \frac{\cos\varphi(x)}{x\sin\varphi(x) - 1} \right)$$

(2) $$\varphi''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos y}{x\sin y - 1}\right) = \frac{-y'\sin y\,(x\sin y - 1) - \cos y\,(\sin y + xy'\cos y)}{(x\sin y - 1)^2}$$
$$= \frac{-\sin y\cos y + (\sin y - x)y'}{(x\sin y - 1)^2} = \frac{-\sin y\cos y\,(x\sin y - 1) + (\sin y - x)\cos y}{(x\sin y - 1)^3}$$
$$= \frac{-x\sin^2 y\cos y + 2\sin y\cos y - x\cos y}{(x\sin y - 1)^3}$$
$$\left(= \frac{-x\sin^2\varphi(x)\cos\varphi(x) + 2\sin\varphi(x)\cos\varphi(x) - x\cos\varphi(x)}{(x\sin\varphi(x) - 1)^3} \right)$$