数学A1 中間テスト (2004年6月14日)　担当 太田 克弘

1. 関数 $f:[0,1]\to[0,1]$ が $[0,1]$ 上連続であるとすると、$f(c)=c^2$ となる $c\in[0,1]$ が必ず存在することを証明せよ。

2. $f(x)=x^3$ とする。

(1) 与えられた実数 a,h に対し、$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$, $0<\theta<1$ を満たす θ を求めよ。ただし $a>0$, $a+h>0$ とする。

(2) (1) の θ に対し $\lim_{h\to 0}\theta$ を求めよ。

3. (1) e^{-x} のマクローリン展開を求めよ.

(2) 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-(A+Bx+Cx^2)}{x^3}$$

が存在するように定数 A,B,C を定め、そのときの極限値を求めよ。

4. $f(x,y)$ を C^2 級、 $g(u,v)=f(u-v,uv)$ とする。

(1) $g_u(u,v)$, $g_v(u,v)$ を f の偏微分と u,v の式で表せ。

(2) $g_{uv}(u,v)$ を f の2階までの偏微分と u,v の式で表せ。

5. $(x,y)\in\boldsymbol{R}^2$ は $x\cos y+y=1$ を満たすとする。

(1) $(x,y)=(0,1)$ の近くで陰関数 $y=\varphi(x)$ が存在することを示し、$\varphi'(x)$ を x と y ($=\varphi(x)$) の式で表せ。

(2) さらに、 $\varphi''(x)$ を x と y ($=\varphi(x)$) の式で表せ。